Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Ain Témouchent BELHADJ Bouchaib

Faculté des Sciences Et de la Technologie

Examen Final de Mathématiques Financières

Spécialité : M1 Probabilités et Statistique Appliquées

Dr. MECENE R.

Exercice 1 *(Questions de cours)* ***(5 pts)***

1. *Citer les critères de classement des marchés financier.* ***(1pt)***
2. *Soit* S_t *le prix d'un actif financier à un instant* t.
   a) *Exprimer le rendement net sur la période de détention de l'instant* $(t-1)$ *à l'instant* t. ***(1pt)***
   b) *Que signifie un rendement négatif ?* ***(1pt)***
3. *Définir la notion de la probabilité risque neutre.* ***(1pt)***
4. *Qu'est-ce qu'il fait augmenter l'intérêt ?* ***(1pt)***

Exercice 2 ***(8,5pts)***

On considère un marché financier composé d'un actif risqué et un autre sans risque. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

1. *Proposer un modèle mathématique modélisant ce marché financier en temps discret.* ***(3pts)***
2. *Représenter l'évolution du cours d'un actif financier risqué sur deux période par un arbre binaire.* ***(1,5pts)***
3. *Déterminer le processus (stochastique) du prix* $\{S_t\}$. ***(4pts)***

Exercice 3 ***(6,5pts)***

Les placements effectués par une personne au cours d'une année ont été les suivants :

- 38500 \$ *au taux de* 8% *du* 02 *janvier au* 16 *mars.*
- 72400 \$ *au taux de* 6% *du* 17 *mars au* 12 *juillet.*
- 64000 \$ *au taux de* 11% *du* 09 *septembre au* 11 *novembre.*

1. *Parmi les trois placement, quel est le plus intéressant ? Justifier ta réponse.* ***(2pts)***
2. *Quel est le taux moyen de ses placements ?* ***(1,5pt)***
3. *L'investisseur envisage de placer au taux moyen, un capital égal à la somme des placements effectués précédemment. Au terme de combien de temps obtiendra-t-il un intérêt égal à celui obtenu dans le dernier cas ?* ***(1,5pts)***
4. *Un autre placement de trois ans avec un taux d'intérêt post-compté de* 20% *rapport un capital de* 80000. *Trouver le capital initial.* ***(1,5pt)***

Bon Courage

Corrigé type de l'examen

Question de cours :

1) Les critères de classement des marchés financiers sont :
- Classification économique.
- Classification organisationnelle.
- classification par nature d'engagement

(1)

2) S_t : Le prix d'un actif à un instant t.

Le Rendement noté R_t à un instant t est donné

Par : $$R_t = \left(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right) \times 100.$$ (1)

- Un rendement négatif signifie qu'il y a une perte d'argent. (1)

3) La probabilité risque neutre est une probabilité équivalente à P qui rend martingale toute stratégie autofinançante simple actualisée tq : $\tilde{X}_0^{x,k} = E^{Q}[\tilde{X}_1^{x,k}]$ (1)

4) L'intérêt augmente lorsque le capital est grand ou bien si la durée du placement est longue. (1)

Ex 2 On peut modéliser le marché financier dans un temps discret par le modèle CRR, tq : 0,75

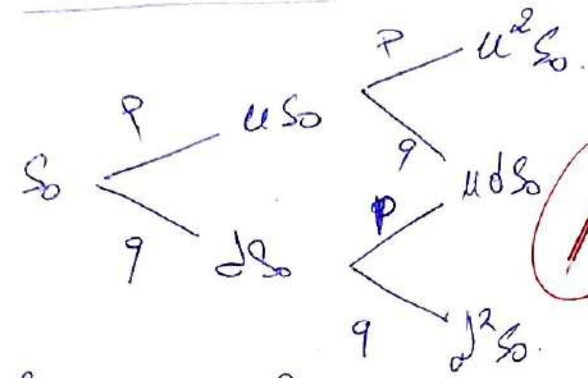
. Pour l'actif sans risque : $t=0 \Rightarrow S_0^0 = 1$ (0,5)

et pour $t = 1, \dots, T \Rightarrow S_t^0 = (1+r)^t$ (0,5)

. Pour l'actif risqué le prix peut haussier (avoir rendement u) ou baissier (avoir rendement d). 0,25

$t=0 \Rightarrow S_0$. 0,25 0,25 donc : $S_t = \begin{cases} S_0(1+u)^t \\ S_0(1+d)^t \end{cases}$ (0,5)

2) Arbre binaire sur deux période : on considère l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$



$q = 1 - p$

3) Le processus du prix :

$$S_1 = \begin{cases} uS_0 & p \\ dS_0 & q \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} u^2S_0 & p^2 \\ udS_0 & 2pq \\ d^2S_0 & q^2 \end{cases}$$

$\{S_0, S_1, S_2\}$ est un processus du prix.

$$\begin{cases} E(S_1) = p\,uS_0 + q\,dS_0 = S_0(pu + qd) \\ E(S_2) = u^2p^2S_0 + 2pq\,udS_0 + q^2d^2S_0 = S_0(up + qd)^2 \end{cases}$$

Ex 3 :

Un placement intéressant $\Rightarrow$ un intérêt plus élevé.

$$I_1 = \frac{C_1 \times t_1 \times n_1}{360 \times 100} = \frac{38500 \times 8 \times 73}{36000} = \boxed{624{,}56\ \$}$$

$n_1 = (31 - 2) + 28 + 16 = 73$ jrs

$$I_2 = \frac{C_2 \times t_2 \times n_2}{360 \times 100} = \frac{72400 \times 6 \times 117}{360 \times 100} = \boxed{1411{,}8\ \$}$$

$n_2 = (31 - 17) + 30 + 31 + 30 + 12 = 117$ jrs

$$I_3 = \frac{C_3 \times t_3 \times n_3}{36000} = \frac{64000 \times 11 \times 63}{36000} = \boxed{1232\ \$}$$

$n_3 = (30 - 9) + 31 + 11 = 63$ jrs

le deuxième placement est le plus intéressant, car il possède la valeur la plus grande d'intérêt. (0,5)

2)

taux moyen :

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{3} c_i n_i t_i}{\sum_{i=1}^{3} c_i n_i} = \frac{(38500 \times 8 \times 73) + (72400 \times 6 \times 117) + (64000 \times 11 \times 63)}{(38500 \times 73) + (72400 \times 117) + (64000 \times 63)}$$

(1,5)

$$= \frac{22484000 + 50824800 + 44352000}{2810500 + 8470800 + 4032000} = \frac{117660800}{15313300}$$

$$= \boxed{7,68\ \%}$$

3) $C = C_1 + C_2 + C_3 = 174\,900$ \$.

$t = \bar{t} = 7,68\%$

$n = ?$

$$I = I_3 \Rightarrow \frac{C \times t \times n}{36000} = 1232.$$

$$\Rightarrow n = \frac{36000 \times 1232}{t \times C} = \frac{36000 \times 1232}{174900 \times 7,68}$$

(1,5)

$$= \frac{44352000}{1343232}$$

$$\boxed{\simeq 33,02 \text{ jrs}}$$

4) Intérêt post-compté $\Leftrightarrow C_0 = C_n / (1 + t \times n / 100)$.

$$C_0 = \frac{80\,000}{1 + 20 \times \frac{3}{100}} = \frac{80\,000}{1,6} = \boxed{50\,000 \text{ \$}}$$

(1,5)

capital initial

Corrigé de l'examen de Processus Stochastiques

Exercice 1 :(Questions de cours)

1. Un processus aléatoire est une famille $(X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires associée à toutes les valeurs de t de T.
2. Un processus stochastique est dit "à temps discret" lorsque T est discret (ex. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou leurs parties etc.)
3. L'espace d'état d'un processus aléatoire est son ensemble d'arrivée dans lequel il prend toutes ses valeurs.
4. Une trajectoire est une réalisations d'un processus aléatoire pour un aléa donné ω de Ω .
5. Les lois finidimensionnelles sont les lois marginales de dimensions finies du processus.

Exercice 2 :

1. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$ et $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, dt\, dy.$
2. $f(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy}$ et $F(y/x) = \int_{-\infty}^{y} f(s/x)\, ds = \dfrac{1}{f_X(x)}\int_{-\infty}^{y} f(x,s)\, ds$
3. $E(X,Y) = (E(X), E(Y)) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x,y)\, dx\, dy\right)$
4. $E(X/Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x/y)\, dx = \frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\, dx$

Exercice 3 :

1. Si les X_t sont i.i.d. alors : $Cov(X_t, X_{t'}) = 0$ pour $t \neq t'$ et $Cov(X_t, X_t) = Var(X_t) = 2$.
2. Si les X_t sont non corrélées, elles ne sont pas nécessairement i.i.d.
3. $(X_t)_{t\in Z}$ n'est pas un bruit blanc puisqu'on ne connait pas sa fonction de covariance. Il serait un bruit blanc lorsque les X_t sont non corrélées.
4. Dans ce cas, il serait un bruit blanc faible puisqu'on ne connait pas sa loi de probabilité.
5. Non, puisqu'il n'est pas fort.

Exercice 4 :

1. $E(Y_t) = E(aY_{t-1} + \varepsilon_t) = aE(Y_{t-1}) + E(\varepsilon_t) = aE(Y_{t-1})$, la stationnarité exige que : $E(Y_t) = E(Y_{t-1})$ ceci implique que : $(1-a)E(X_t) = 0$ d'où : $E(Y_t) = 0$ si $1 - a \neq 0$. D'autre part,
   $Var(Y_t) = var(aY_{t-1} + \varepsilon_t) = a^2Var(Y_{t-1}) + 2Cov(aY_{t-1}, \varepsilon_t) + var(\varepsilon_t) = a^2Var(Y_{t-1}) + 0 + var(\varepsilon_t) = a^2Var(Y_{t-1}) + \sigma^2$ la stationnarité exige que : $Var(Y_t) = var(Y_{t-1})$ d'où la relation : $Var(Y_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-a^2}$.
   Or, la variance est toujours strictement positive ce qui exige que : $1 - a^2 > 0$ d'où la condition de stationnarité : $|a| < 1$.
2. Le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. En effet sa moyenne : $E(Z_t) = 0$ pour tout t de $\mathbb{Z}$, sa variance :
   $Var(Z_t) = Var(\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) + 2Cov(\varepsilon_t, b\varepsilon_t) + b^2var(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + 0 + b^2\sigma^2 = (1+b^2)\sigma^2$ qui est une constante positive. En plus,
   $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + b\varepsilon_{t-2}) = bCov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = bVar(\varepsilon_{t-1}) = b\sigma^2$ ne dépend pas de t et $Cov(Z_t, Z_{t-h}) = 0$ pour $h = 2, 3, \ldots$ indépendant de t.

Corrigé type EMD Séries Chronologiques

Responsable : Dr. BENNAFLA Djamila

questions : voir le cours

Exercice 1 : 06 pts

1- on a $MA(2)$: $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$

$= (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2)\varepsilon_t$.

2pts

- Si on multiplie les deux membres du modèle par $Y_{t-\tau}$ et si on calcul les espérances mathématiques, on obtient : 0,25

$E(Y_t Y_{t-\tau}) = E(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-\tau} - \theta_1 \varepsilon_{t-\tau-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-\tau-2})$

- Pour différentes valeurs de τ on obtient :

$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\,\sigma_\varepsilon^2$; $\tau = 0$ 0,25

$\gamma_1 = (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\,\sigma_\varepsilon^2$; $\tau = 1$ 0,25

$\gamma_2 = -\theta_2\,\sigma_\varepsilon^2$; $\tau = 2$ 0,25

$\gamma_\tau = 0$; $\tau > 2$ 0,25

- Par suite on obtient facilement :

$R_1 = \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$ 0,25

$R_2 = \dfrac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$ 0,25

$R_\tau = 0$ pour $\tau > 2$. 0,25

2. Pour qu'un processus MA(2) soit inversible il faut que les racines du polynôme caractéristique $1-\theta_1 L-\theta_2 L^2=0$ soient en dehors du cercle unité ✓0,5

2,5pts

. En utilisant l'opérateur polynômiale de retard, on peut obtenir :

$$\varepsilon_t = \Theta^{-1}(L) Y_t = \frac{1}{1-\theta_1 L-\theta_2 L^2} Y_t \quad ✓0,25$$

si $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ sont les racines du polynôme caractéristique on peut factoriser le dénominateur de l'expression précédente :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} Y_t \quad ✓0,5$$

Par développement en fraction rationnelle on aura :

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{A}{1-\lambda_1 L} + \frac{B}{1-\lambda_2 L} \quad ✓0,25$$

Par suite :

$$1 = (1-\lambda_2 L)A + (1-\lambda_1 L)B = (A+B) + (-\lambda_2 A - \lambda_1 B)L$$

Par identification.

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -\lambda_2 A-\lambda_1 B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \\ B = \dfrac{+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \end{cases} \quad ✓0,5$$

Par conséquent

$$\varepsilon_t = \left[\frac{-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{1}{1-\lambda_1 L} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{1}{1-\lambda_2 L}\right] Y_t \quad 0,5$$

$$= \left[\frac{-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_1 L)^j + \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_2 L)^j\right] Y_t$$

Donc, on peut passer d'un MA(2) à un AR(∞)

3. On a $\lambda_1 = 0,6$ et $\lambda_2 = 0,3$ les racines

1,5pt

de $\lambda_2 - \theta_1 \lambda_1 - \theta_2 = 0$

comme on peut trouver les racines de l'équation caractéristique par

$$\lambda_1 = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2} \quad 0,5$$

$$\lambda_2 = \frac{\theta_1}{2} - \frac{\sqrt{\theta_1^2 + 4\theta_2}}{2}$$

on peut voir que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \theta_1$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{\theta_1^2}{4} - \frac{\theta_1^2 + 4\theta_2}{4} = -\theta_2 \quad 0,5$$

Par conséquent,

$$\theta_1 = 0,6 + 0,3 = 0,9$$

$$\theta_2 = -(0,6 \cdot 0,3) = -0,18 \quad 0,5$$

Donc, $Y_t = \varepsilon_t - 0,9\,\varepsilon_{t-1} + 0,18\,\varepsilon_{t-2}$

3/5

Exercice 2 : 6 pts

1. On commence par $p=1$.

4/4 Dans un AR(1) on a $\begin{cases} R_\tau = \varphi_1 R_{\tau-1} \text{ pour } \tau \geq 1 \\ R_1 = \varphi_1 \end{cases}$ ✓0,5

En prenant $R_1 = \varphi_1 = 0,80$ ✓

$R_2 = 0,80 \cdot 0,80 = 0,64 \neq 0,82$. ✓0,5

Donc, ce n'est pas un AR(1). ✓0,25

• Pour $p=2$. Avec le système de Yule Walker, ✓0,25

$\begin{cases} R_1 = \varphi_1 + R_1 \varphi_2 \\ R_2 = R_1 \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$ ✓0,5

que nous résolvons pour φ_1 et φ_2 ; on obtient :

$\varphi_1 = 0,4$ et $\varphi_2 = 0,5$ ✓0,5

En utilisant l'éq. aux diff. d'ordre 2 relatives aux autocorrélations : ✓0,5

$R_\tau = \varphi_1 R_{\tau-1} + \varphi_2 R_{\tau-2}$; $\tau \geq 3$

$R_3 = 0,728$, $R_4 = 0,7012$, $R_5 = 0,6448$ ✓0,5

qui coïncident, à des petites erreurs près avec les coefficients donnés, donc on suppose qu'ils proviennent d'un AR(2). ✓0,5

4/5

2- Pour déduire φ_2, on utilise les deux eq de yule-walker correspondantes à $AR(2)$

2pts

$$\begin{cases} R_1 = \varphi_1 + \varphi_2 R_1 \Rightarrow R_1 = \dfrac{\varphi_1}{1-\varphi_2} \\ R_2 = \varphi_1 R_1 + \varphi_2 \Rightarrow R_2 = \varphi_1 \dfrac{\varphi_1}{1-\varphi_2} + \varphi_2 \end{cases}$$ ✓ 0,5

$$\Rightarrow R_2 = \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2$$

Par suite, on obtient :

$$\varphi_2^2 - (1+R_2)\varphi_2 + R_2 - \varphi_1^2 = 0$$ ✓

En résolvant l'équation avec $\begin{cases} \varphi_1 = 0,8 \\ R_2 = 0,6 \end{cases}$ ✓ 0,5

on obtient :

$$\varphi_2' = 1,62 \text{ et } \varphi_2'' = -0,02.$$ ✓ ✓ 0,5

Auxquelle correspondent les valeurs

$$\underbrace{R_1' = -1,29}_{\text{n'a pas de sens } (-1 \leq R \leq 1)} \text{ et } R_1'' = 0,78$$ ✓ 0,5

alors $\varphi_2 = \varphi_2'' = -0,02$ ✓

5/5